Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
i schemat oceniania zadań otwartych

LICEUM

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	**A**	**D**	**A**	**A**	**B**	**A**	**B**	**B**	**C**	**B**	**D**	**C**	**C**	**C**	**D**	**B**	**C**	**C**	**B**

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 21. ***(2pkt)***
Rozwiąż nierówność $12-x^2 \le x$.

Rozwiązanie
Nierówność zapisujemy w postaci równoważnej $x^2+x-12 \ge 0$, a następnie obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego x^2+x-12, rozkładając go na czynniki liniowe

$$x^2+x-12=(x-3)(x+4).$$

Stąd

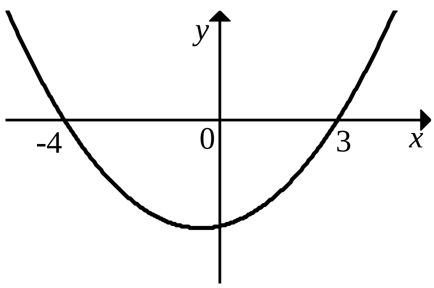
$$x_1=3,\ x_2=-4.$$

Możemy również obliczyć pierwiastki wykorzystując wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego. Wówczas

$$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-12)=49,\ \sqrt{\Delta}=7,$$

$$x_1=\frac{-1+7}{2\cdot1}=3,\ x_2=\frac{-1-7}{2\cdot1}=-4.$$

Szkicujemy wykres trójmianu kwadratowego $y=x^2+2x-15$,



z którego odczytujemy zbiór rozwiązań rozwiązywanej nierówności

$$x\in(-\infty,-4\rangle\cup\langle3,+\infty).$$

Odpowiedź: $x\in(-\infty,-4\rangle\cup\langle3,+\infty)$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt,
gdy:

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x_1=3$, $x_2=-4$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $(x+4)(x-3)$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- zapisze nierówność w postaci równoważnej $\left|x+\frac{1}{2}\right| \geq \frac{7}{2}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność

albo

- błędnie przekształci nierówność do postaci równoważnej, np. zapisze $\left|x+\frac{1}{2}\right| \leq \frac{7}{2}$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje ....2 pkt,
gdy:

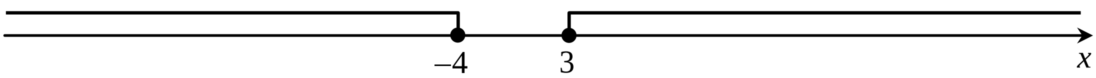
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty,-4\rangle \cup \langle 3,+\infty)$ lub $x \in (-\infty,-4\rangle \cup \langle 3,+\infty)$ lub ($x \leq -4$ lub $x \geq 3$)

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x \leq -4$, $x \geq 3$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



Zadanie 22. ***(2pkt)***

Rozwiąż równanie $\frac{2x^2-x-3}{x+1}=1$.

I sposób rozwiązania

Równanie ma sens, gdy $x+1 \neq 0$, a więc gdy $x \neq -1$. Wtedy równanie możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\frac{2x^2+2x-3x-3}{x+1}=1,$$
$$\frac{2x(x+1)-3(x+1)}{x+1}=1,$$
$$\frac{(2x-3)(x+1)}{x+1}=1,$$
$$2x-3=1,$$
$$2x=4,$$
$$x=2.$$

Liczba 2 jest różna od -1, więc jest jedynym rozwiązaniem równania.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt,
gdy zapisze założenie $x+1 \neq 0$ i zapisze równanie w postaci równoważnej $\frac{(2x-3)(x+1)}{x+1}=1$, na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt,
gdy wyznaczy rozwiązanie równania: $x=2$.

Uwaga
Jeżeli zdający nie założy, że $x+1\neq 0$, zapisze równanie w postaci $2x-3=1$, rozwiąże to równanie, otrzymując $x=2$, ale nie sprawdzi, że liczba 2 spełnia równanie $\frac{2x^2-x-3}{x+1}=1$, to otrzymuje **1 punkt**, jeżeli natomiast sprawdzi, że liczba 2 spełnia podane równanie, to otrzymuje **2 punkty**.

II sposób rozwiązania
Równanie ma sens , gdy $x+1\neq 0$, a więc gdy $x\neq -1$. Wtedy mnożąc obie strony równania przez $x+1\neq 0$ otrzymujemy

$$2x^2-x-3=x+1,$$
$$2x^2-2x-4=0,$$
$$x^2-x-2=0,$$
$$x^2+x-2x-2=0,$$
$$x(x+1)-2(x+1)=0,$$
$$(x-2)(x+1)=0.$$

Stąd $x-2=0$ lub $x+1=0$. Druga z tych równości nie zachodzi, gdyż $x+1\neq 0$. Zatem jedynym rozwiązaniem równania jest $x=2$.
Uwaga
Równanie $x^2-x-2=0$ możemy również rozwiązać, korzystając ze wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego. Wówczas

$$\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9,\ \sqrt{\Delta}=3,$$
$$x_1=\frac{1-3}{2\cdot 1}=-1,\ x_2=\frac{1+3}{2\cdot 1}=2.$$

Pierwszy z otrzymanych pierwiastków trójmianu nie spełnia warunku $x\neq -1$, drugi spełnia ten warunek. Zatem równanie $\frac{2x^2-x-3}{x+1}=1$ ma tylko jedno rozwiązanie $x=2$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt,
gdy zapisze założenie $x+1\neq 0$ i zapisze równanie w postaci równoważnej $2x^2-x-3=x+1$, na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt,
gdy wyznaczy rozwiązanie równania: $x=2$.

Uwaga
Jeżeli zdający nie założy, że $x+1\neq 0$, zapisze równanie w postaci $2x^2-x-3=x+1$, rozwiąże to równanie, otrzymując $x=-1$ lub $x=2$, ale nie sprawdzi, że tylko liczba 2 spełnia równanie $\frac{2x^2-x-3}{x+1}=1$, to otrzymuje **1 punkt**, jeżeli natomiast sprawdzi, że liczba -1 nie spełnia tego równania, a liczba 2 je spełnia, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 23. ***(2 pkt)***
Oblicz sumę wszystkich liczb całkowitych dodatnich podzielnych przez 4 i mniejszych od 300.

I sposób rozwiązania
Zauważmy, że kolejne liczby całkowite dodatnie podzielne przez 4 tworzą ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy $r=4$ i pierwszym wyrazie $a_1=4$. Ponieważ interesują nas tylko liczby

mniejsze od 300, więc ciąg ten jest skończony, a jego ostatnim wyrazem jest $a_n = 296$.

Ze wzoru $a_n = a_1 + (n-1)r$ na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy równanie

$$296 = 4 + (n-1)4,$$
$$296 = 4 + 4n - 4,$$
$$296 = 4n$$
$$74 = n.$$

Suma wszystkich 74 wyrazów tego ciągu jest równa

$$S_{74} = \frac{4+296}{2} \cdot 74 = 150 \cdot 74 = 11100.$$

II sposób rozwiązania

Wypiszmy kolejne liczby całkowite dodatnie od 1 do 300 w następujący sposób:

1	2	3	4
5	6	7	8
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
293	294	295	296
297	298	299	300

W każdej z czterech kolumn jest tyle samo liczb $\frac{300}{4} = 75$. Interesujące nas liczby znajdują się w ostatniej kolumnie, z tym, że liczba 300 nas nie interesuje. Mamy więc obliczyć sumę 74 liczb:

$$4 + 8 + 12 + \ldots + 292 + 296.$$

Łącząc w pary składnik pierwszy i ostatni, drugi i przedostatni, itd. otrzymujemy w rezultacie sumę 37 składników, z których każdy jest równy 300. Zatem szukana suma jest równa

$$37 \cdot 300 = 11100.$$

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt,
gdy zapisze, że pierwszym składnikiem sumy jest 4, ostatnim 296 oraz wyznaczy liczbę składników 74 i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt,
gdy obliczy szukaną sumę: 11100.

Zadanie 24. ***(2 pkt)***

Dany jest trójkąt *ABC*, w którym bok *AB* jest dwa razy dłuższy od boku *AC*, sinus kąta *BAC* jest równy $\frac{2}{3}$, a pole trójkąta jest równe 54. Oblicz długości boków *AB* i *AC* tego trójkąta.

I sposób rozwiązania

Niech $c = |AB|$, $b = |AC|$ oraz $\alpha = |\sphericalangle BAC|$. Bok *AB* jest dwa razy dłuższy od boku *AC*, więc $c = 2b$. Pole trójkąta *ABC* wyraża się wzorem $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$. Otrzymujemy zatem równanie

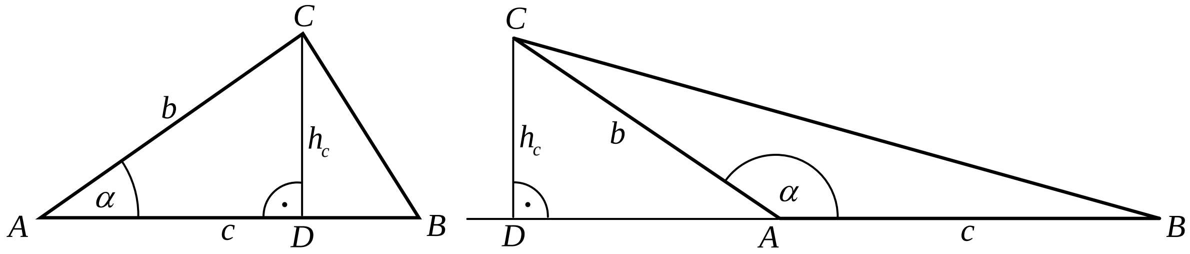
$$54 = \tfrac{1}{2} \cdot b \cdot 2b \cdot \tfrac{2}{3},$$
$$54 = \tfrac{2}{3} \cdot b^2,$$
$$b^2 = 81.$$

Stąd $b = 9$. Zatem $c = 2b = 18$.

Odpowiedź: Boki *AB* i *AC* trójkąta mają długości: $|AB| = 18$, $|AC| = 9$.

II sposób rozwiązania

Niech $c = |AB|$, $b = |AC|$ oraz $\alpha = |\sphericalangle BAC|$. Bok *AB* jest dwa razy dłuższy od boku *AC*, więc $c = 2b$. Ponieważ $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, więc kąt α może być ostry albo rozwarty. Rozważmy więc dwa przypadki. W każdym z nich poprowadźmy wysokość *CD* trójkąta.



Bok *AB* jest dwa razy dłuższy od boku *AC*, więc $c = 2b$.
Z trójkąta prostokątnego *ACD* otrzymujemy odpowiednio w pierwszym i w drugim przypadku

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \text{ oraz } \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{h_c}{b}.$$

Ponieważ $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, więc w obu przypadkach mamy $\frac{h_c}{b} = \sin\alpha$. Stąd

$$h_c = b\sin\alpha.$$

Pole trójkąta *ABC* jest równe $P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c = \frac{1}{2}\cdot 2b\cdot h_c = b\cdot h_c = b\cdot b\sin\alpha = b^2\cdot\frac{2}{3}$.
Otrzymujemy zatem równanie

$$54 = \frac{2}{3}b^2,$$

$$b^2 = 81.$$

Stąd $b = 9$. Zatem $c = 2b = 18$.
Odpowiedź: Boki *AB* i *AC* trójkąta mają długości: $|AB| = 18$, $|AC| = 9$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt,
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $54 = \frac{1}{2}\cdot b\cdot 2b\cdot\frac{2}{3}$, gdzie *b* oznacza długość *AC* trójkąta .

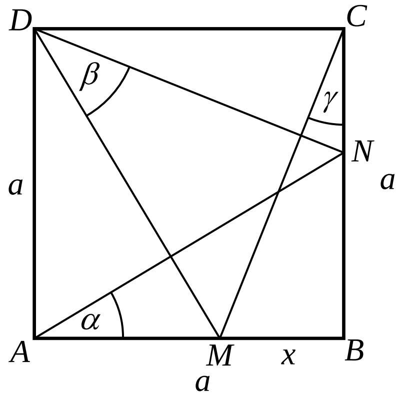
Zdający otrzymuje ....2 pkt,
gdy obliczy długości boków *AB* i *AC* trójkąta *ABC*: $|AB| = 18$, $|AC| = 9$.

Zadanie 25. ***(2 pkt)***

Na boku *AB* kwadratu *ABCD* leży punkt *M*, a na boku *BC* taki punkt *N*, że $|MB| + |BN| = |AB|$. Kąty *BAN*, *MDN*, *MCB* mają miary równe odpowiednio α, β, γ (zobacz rysunek). Udowodnij, że $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

Dowód (I sposób)

Niech *a* oznacza długość boku kwadratu, oraz $x = |MB|$.



Wówczas $|AM| = a - x$. Z założenia wynika, że $x + |BN| = a$, skąd $|BN| = a - x$. To z kolei oznacza, że $|CN| = a - |BN| = a - (a - x) = x$.

Trójkąty *ABN* i *DAM* są prostokątne, $|AD| = |BC| = a$ oraz $|AM| = |BN| = a - x$, więc z cechy *b-k-b* wynika, że te trójkąty są przystające. Stąd wnioskujemy, że

(1) $$|\sphericalangle ADM| = |\sphericalangle BAN| = \alpha .$$

Tak samo trójkąty *CBM* i *DCN* są przystające, gdyż oba są prostokątne oraz $|BC| = |CD| = a$ i $|MB| = |CN| = x$. Stąd wynika, że

(2) $$|\sphericalangle CDN| = |\sphericalangle BCM| = \gamma .$$

Ponieważ $|\sphericalangle ADM| + |\sphericalangle MDN| + |\sphericalangle NDC| = 90^\circ$, więc stąd oraz z równości (1) i (2) wynika, że

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ .$$

To kończy dowód.

Schemat oceniania rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt,
gdy zauważy, że trójkąty *ABN* i *DAM* (lub *CBM* i *DCN*) są przystające i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt,
gdy uzasadni, że $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

Zadanie 26. ***(2 pkt)***
Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych *a*, *b* prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + b^2 + 1 > a + b .$$

Dowód (I sposób)
Przekształcamy nierówność równoważnie w następujący sposób:

$$a^2 - a + b^2 - b + 1 > 0 ,$$

$$a^2 - a + \tfrac{1}{4} + b^2 - b + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} > 0 ,$$

$$\left(a - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} > 0 .$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych *a*, *b*, gdyż kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny, a suma dwóch liczb nieujemnych i jednej dodatniej jest dodatnia. To kończy dowód.

Dowód (II sposób)
Nierówność $a^2 + b^2 + 1 > a + b$ możemy zapisać w postaci równoważnej

$$a^2 - a + \left(b^2 - b + 1\right) > 0 .$$

Możemy potraktować tę nierówność jak nierówność kwadratową z niewiadomą a. Ponieważ współczynnik przy a^2 jest dodatni, więc wystarczy wykazać, że wyróżnik trójmianu stojącego po lewej stronie nierówności jest ujemny dla dowolnej liczby rzeczywistej b, czyli

$$\Delta < 0,$$

$$(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot\left(b^2 - b + 1\right) < 0,$$

$$1 - 4b^2 + 4b - 4 < 0,$$

$$4b^2 - 4b + 3 > 0.$$

Obliczmy wyróżnik trójmianu $4b^2 - 4b + 3$

$$\Delta_b = (-4)^2 - 4\cdot 4\cdot 3 = 16 - 48 = -32.$$

Ponieważ wyróżnik ten jest ujemny i współczynnik przy b^2 jest dodatnie, więc nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej b. To kończy dowód.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy

- zapisze nierówność w postaci równoważnej $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$

albo

- zapisze nierówność w postaci równoważnej $a^2 - a + \left(b^2 - b + 1\right) > 0$ i potraktuje tę nierówność jak nierówność kwadratową z niewiadomą a oraz zapisze wyróżnik $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot\left(b^2 - b + 1\right)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 27. ***(4 pkt)***

W pudełku znajduje się dwanaście kul ponumerowanych od 1 do 12, przy czym kule o numerach 1, 2, 3 są białe, kule o numerach 4, 5, 6, 7 – czarne, a pozostałe kule są zielone. Losujemy kolejno bez zwracania dwa razy po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowane kule są różnych kolorów i jedna z nich ma numer parzysty, a druga nieparzysty. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

I sposób rozwiązania (klasyczna definicja prawdopodobieństwa - ciągi)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary (x, y) różnych liczb naturalnych ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 12\cdot 11 = 132$. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym.

Oznaczamy przez A zdarzenie polegające na tym, że wylosowane kule są różnych kolorów i jedna z nich ma numer parzysty, a druga nieparzysty. Wypiszmy więc wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A:

$$(1,4),\ (1,6),\ (1,8),\ (1,10),\ (1,12),$$

$$(2,5),\ (2,7),\ (2,9),\ (2,11),$$

$$(3,4),\ (3,6),\ (3,8),\ (3,10),\ (3,12),$$

$$(4,1),\ (4,3),\ (4,9),\ (4,11),$$

$$(5,2),\ (5,8),\ (5,10),\ (5,12),$$

$$(6,1),\ (6,3),\ (6,9),\ (6,11),$$

$$(7,2),\ (7,8),\ (7,10),\ (7,12),$$
$$(8,1),\ (8,3),\ (8,5),\ (8,7),$$
$$(9,2),\ (9,4),\ (9,6),$$
$$(10,1),\ (10,3),\ (10,5),\ (10,7),$$
$$(11,2),\ (11,4),\ (11,6),$$
$$(12,1),\ (12,3),\ (12,5),\ (12,7).$$

Zatem $|A| = 48$ i $P(A) = \dfrac{48}{12\cdot 11} = \dfrac{4}{11}$.

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowane kule są różnych kolorów i jedna z nich ma numer parzysty, a druga nieparzysty jest równe $\dfrac{4}{11}$.

Uwaga

Możemy zilustrować zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych w tabeli 12 na 12 oraz zaznaczyć pola sprzyjające zdarzeniu *A*.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1				X		X		X		X		X
2					X		X		X		X	
3				X		X		X		X		X
4	X		X						X		X	
5		X						X		X		X
6	X		X						X		X	
7		X						X		X		X
8	X		X		X		X					
9		X		X		X						
10	X		X		X		X					
11		X		X		X						
12	X		X		X		X					

Prawdopodobieństwo zdarzenia *A* jest zatem równe

$$P(A) = \frac{48}{12\cdot 11} = \frac{4}{11}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 12\cdot 11$

albo

- wypisze zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A* i spełniające jeden spośród dwóch warunków:
    - numer pierwszej kuli jest nieparzysty, a numer drugiej jest parzysty albo numer pierwszej jest parzysty, a drugiej nieparzysty
    - wylosowane kule są innych kolorów

i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych i wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A*:

$|\Omega| = 12\cdot 11$,

$$A = \{(1,4), (1,6), (1,8), (1,10), (1,12), (2,5), (2,7), (2,9), (2,11),$$
$$(3,4), (3,6), (3,8), (3,10), (3,12), (4,1), (4,3), (4,9), (4,11),$$
$$(5,2), (5,8), (5,10), (5,12), (6,1), (6,3), (6,9), (6,11),$$
$$(7,2), (7,8), (7,10), (7,12), (8,1), (8,3), (8,5), (8,7),$$
$$(9,2), (9,4), (9,6), (10,1), (10,3), (10,5), (10,7),$$
$$(11,2), (11,4), (11,6), (12,1), (12,3), (12,5), (12,7)\}$$

i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A* i poda ich liczbę:

$|\Omega| = 12\cdot 11$,

$$A = \{(1,4), (1,6), (1,8), (1,10), (1,12), (2,5), (2,7), (2,9), (2,11),$$
$$(3,4), (3,6), (3,8), (3,10), (3,12), (4,1), (4,3), (4,9), (4,11),$$
$$(5,2), (5,8), (5,10), (5,12), (6,1), (6,3), (6,9), (6,11),$$
$$(7,2), (7,8), (7,10), (7,12), (8,1), (8,3), (8,5), (8,7),$$
$$(9,2), (9,4), (9,6), (10,1), (10,3), (10,5), (10,7),$$
$$(11,2), (11,4), (11,6), (12,1), (12,3), (12,5), (12,7)\}$$

$|A| = 48$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia *A* i wynik zapisze w postaci ułamka nieskracalnego: $P(A) = \frac{4}{11}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający uwzględni tylko jeden z warunków np. przyjmie, że numer pierwszej kuli jest nieparzysty, a numer drugiej jest parzysty albo numer pierwszej jest parzysty, a drugiej nieparzysty i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeśli zdający wypisując zdarzenie elementarne pominie jedno zdarzenie lub dwukrotnie wypisze jedno zdarzenie i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
4. Jeśli zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia *A*, ale nie zapisze go w postaci ułamka nieskracalnego, np. zapisze $P(A) = \frac{24}{66}$, to otrzymuje **3 punkty**.

II sposób rozwiązania (klasyczna definicja prawdopodobieństwa - zbiory)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie zbiory $\{x, y\}$ złożone z dwóch liczb naturalnych ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = \frac{12\cdot 11}{2} = 66$. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym.
Oznaczamy przez *A* zdarzenie polegające na tym, że wylosowane kule są różnych kolorów i jedna z nich ma numer parzysty, a druga nieparzysty. Wypiszmy więc wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A*:

$$\{1,4\},\ \{1,6\},\ \{1,8\},\ \{1,10\},\ \{1,12\},$$
$$\{2,5\},\ \{2,7\},\ \{2,9\},\ \{2,11\},$$
$$\{3,4\},\ \{3,6\},\ \{3,8\},\ \{3,10\},\ \{3,12\},$$
$$\{4,9\},\ \{4,11\},$$
$$\{5,8\},\ \{5,10\},\ \{5,12\},$$
$$\{6,9\},\ \{6,11\},$$
$$\{7,8\},\ \{7,10\},\ \{7,12\}.$$

Zatem $|A| = 24$ i $P(A) = \frac{24}{66} = \frac{4}{11}$.
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowane kule są różnych kolorów i jedna z nich ma numer parzysty, a druga nieparzysty jest równe $\frac{4}{11}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = \frac{12\cdot 11}{2}$

albo

- wypisze zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A* i spełniające jeden spośród dwóch warunków:
    - o numer pierwszej kuli jest nieparzysty, a numer drugiej jest parzysty albo numer pierwszej jest parzysty, a drugiej nieparzysty
    - o wylosowane kule są innych kolorów

i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych i wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A*:

$|\Omega| = \frac{12\cdot 11}{2}$,

$A = \{ \{1,4\}, \{1,6\}, \{1,8\}, \{1,10\}, \{1,12\}, \{2,5\}, \{2,7\}, \{2,9\}, \{2,11\}, \{3,4\}, \{3,6\}, \{3,8\}, \{3,10\}, \{3,12\}, \{4,9\}, \{4,11\}, \{5,8\}, \{5,10\}, \{5,12\}, \{6,9\}, \{6,11\}, \{7,8\}, \{7,10\}, \{7,12\} \}$

i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A* i poda ich liczbę:

$|\Omega| = \frac{11\cdot 10}{2}$,

$A=\{\{1,4\},\{1,6\},\{1,8\},\{1,10\},\{1,12\},\{2,5\},\{2,7\},\{2,9\},\{2,11\},\{3,4\},\{3,6\},\{3,8\},$
$\{3,10\},\{3,12\},\{4,9\},\{4,11\},\{5,8\},\{5,10\},\{5,12\},\{6,9\},\{6,11\},\{7,8\},\{7,10\},\{7,12\}\}$
$|A|=24$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia *A* i wynik zapisze w postaci ułamka nieskracalnego: $P(A)=\frac{4}{11}$.

<u>Uwagi</u>

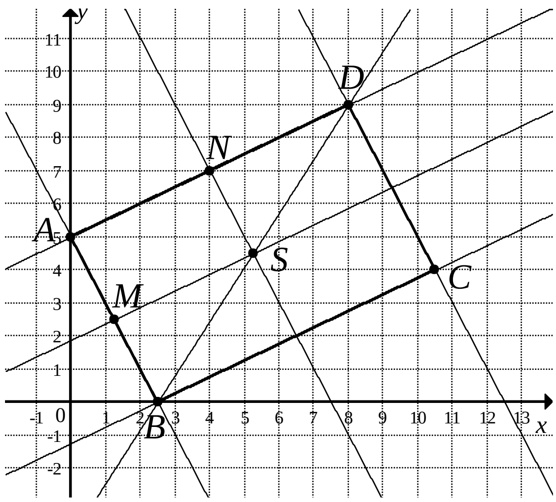
1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A)>1$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający uwzględni tylko jeden z warunków np. przyjmie, że numer pierwszej kuli jest nieparzysty, a numer drugiej jest parzysty albo numer pierwszej jest parzysty, a drugiej nieparzysty i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeśli zdający wypisując zdarzenie elementarne pominie jedno zdarzenie lub dwukrotnie wypisze jedno zdarzenie i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
4. Jeśli zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia *A*, ale nie zapisze go w postaci ułamka nieskracalnego, np. zapisze $P(A)=\frac{12}{33}$, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 28. *(4 pkt)*

Punkt $A=(0,5)$ jest wierzchołkiem prostokąta *ABCD*. Osiami symetrii tego prostokąta są proste o równaniach $y=\frac{1}{2}x+\frac{15}{8}$ oraz $y=-2x+15$. Wyznacz równanie prostej zawierającej przekątną *BD* tego prostokąta.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że punkt *A* nie leży na żadnej z podanych prostych, gdyż $\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{15}{8}=\frac{15}{8}\neq 5$ oraz $-2\cdot 0+15=15\neq 5$. Wynika stąd, że podane proste są osiami symetrii boków tego prostokąta. Punkt *S* przecięcia tych prostych jest środkiem symetrii prostokąta i jednocześnie środkiem każdej z jego przekątnych. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie, jak na rysunku.



Obliczmy współrzędne punktu *S*. Wystarczy rozwiązać układ równań $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+\frac{15}{8} \\ y=-2x+15 \end{cases}$.

Stąd otrzymujemy równanie

$$\tfrac{1}{2}x+\tfrac{15}{8}=-2x+15,$$
$$\tfrac{5}{2}x=15-\tfrac{15}{8},$$
$$\tfrac{5}{2}x=\tfrac{105}{8},$$
$$x=\tfrac{21}{4},$$

więc $y=-2\cdot\frac{21}{4}+15=\frac{9}{2}$. Zatem $S=\left(\frac{21}{4},\frac{9}{2}\right)$.

Wyznaczmy równanie prostej *AB*. Jest ona równoległa do prostej o równaniu $y=-2x+15$, więc jej współczynnik kierunkowy jest równy -2. Ponadto przechodzi przez punkt $A=(0,5)$, więc jej równanie ma postać

$$y=\tfrac{1}{2}x+5.$$

Rozwiązując układ równań $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+\frac{15}{8} \\ y=-2x+5 \end{cases}$, obliczymy współrzędne środka *M* boku *AB* prostokąta. Przyrównując prawe strony równań układu dostajemy równanie

$$\tfrac{1}{2}x+\tfrac{15}{8}=-2x+5,$$
$$\tfrac{5}{2}x=5-\tfrac{15}{8},$$
$$\tfrac{1}{2}x=1-\tfrac{3}{8},$$
$$x=\tfrac{5}{4}$$

więc $y=-2\cdot\frac{5}{4}+5=\frac{5}{2}$. Zatem $M=\left(\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right)$.

Ze wzorów na współrzędne środka odcinka otrzymujemy

$$M=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{0+x_B}{2},\frac{5+y_B}{2}\right).$$

Stąd

$$\frac{x_B}{2}=\frac{5}{4}\ \text{oraz}\ \frac{5+y_B}{2}=\frac{5}{2},$$
$$x_B=\frac{5}{2}\ \text{oraz}\ y_B=0.$$

Współrzędne wierzchołka *B* są więc równe $B=\left(\frac{5}{2},0\right)$.

Prosta zawierająca przekątną *BD* prostokąta przechodzi przez punkty *B* i *S*. Jej współczynnik kierunkowy jest równy

$$a_{BS}=\frac{\frac{9}{2}-0}{\frac{21}{4}-\frac{5}{2}}=\frac{\frac{9}{2}}{\frac{11}{4}}=\frac{18}{11},$$

więc równanie tej prostej ma postać

$$y=\tfrac{18}{11}\left(x-\tfrac{5}{2}\right)+0,\ \text{czyli}\ y=\tfrac{18}{11}x-\tfrac{45}{11}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający

- obliczy współrzędne punktu *S*: $S=\left(\frac{21}{4},\frac{9}{2}\right)$

albo

- wyznaczy równanie prostej *AB*: $y=-2x+5$

albo

- wyznaczy równanie prostej *AD*: $y=\frac{1}{2}x+5$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający

- obliczy współrzędne punktu *M*: $M=\left(\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right)$

albo

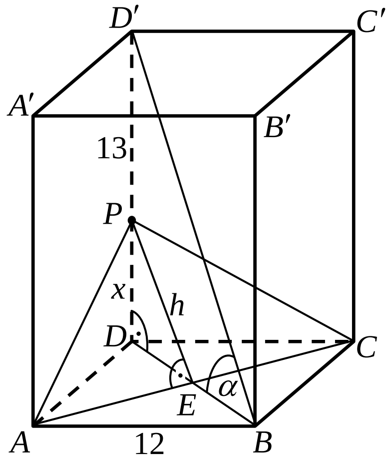
- obliczy współrzędne punktu *N*: $N=(4,7)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt
Zdający obliczy współrzędne dwóch punktów, przez które przechodzi prosta *BD*, np.:
$S=\left(\frac{21}{4},\frac{9}{2}\right)$ i $B=\left(\frac{5}{2},0\right)$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt
Zdający wyznaczy równanie prostej *BD*: $y=\frac{18}{11}x-\frac{45}{11}$.

Zadanie 29. ***(5 pkt)***
Krawędź podstawy *ABCD* graniastosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDA'B'C'D'$ jest równa 12. Na krawędzi bocznej DD' obrano punkt *P* taki, że $|PD'|=13$ (zobacz rysunek). Graniastosłup ten przecięto płaszczyzną zawierającą przekątną *AC* podstawy i przechodzącą przez punkt *P*. Pole tego przekroju jest równe $54\sqrt{2}$. Oblicz kąt nachylenia przekątnej tego graniastosłupa do podstawy *ABCD*. Wynik podaj w stopniach z dokładnością do $1°$.

Rozwiązanie
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Podstawą graniastosłupa jest kwadrat, więc ze wzoru na długość przekątnej kwadratu otrzymujemy $|AC|=12\sqrt{2}$. Odcinek *DE* jest połową przekątnej, więc $|DE|=6\sqrt{2}$.
Przekrój tego graniastosłupa płaszczyzną zawierającą przekątną *AC* jego podstawy i przechodzącą przez punkt *P* jest trójkątem *ACP*, w którym odcinek *PE* jest wysokością opuszczoną na podstawę *AC*. Pole tego trójkąta jest zatem równe

$$P_{ACP}=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|PE|=\frac{1}{2}\cdot12\sqrt{2}\cdot h=6\sqrt{2}\cdot h.$$

Pole tego przekroju jest też równe $54\sqrt{2}$, więc

$$6\sqrt{2}\cdot h=54\sqrt{2}.$$

Stąd $h=9$.
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *PDE* wynika, że

$$|PE|^2=|PD|^2+|DE|^2,$$

$$h^2=x^2+|DE|^2$$

$$9^2=x^2+\left(6\sqrt{2}\right)^2,$$

$$x^2=81-72=9.$$

Stąd $x=3$, zatem $|DD'|=|PD|+|PD'|=3+13=16$.

Obliczmy tangens kąta α nachylenia przekątnej *BD* graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{|DD'|}{|BD|}=\frac{16}{12\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 0,9428.$$

Z tablic odczytujemy przybliżoną miarę kąta $\alpha\approx 43^\circ$.

Odpowiedź: Kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy jest równy 43° (w zaokrągleniu do 1°).

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający

- obliczy długość przekątnej *AC* podstawy graniastosłupa: $|AC|=12\sqrt{2}$

albo

- zaznaczy kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy

albo

- zaznaczy wysokość *PE* przekroju *ACP* opuszczoną na podstawę *AC*.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający obliczy wysokość *PE* trójkąta *ACP* opuszczoną na postawę *AC*: $|PE|=9$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt

Zdający zaznaczy kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy i obliczy długość odcinka *PD*: $|PD|=3$.

Rozwiązanie prawie pełne ....4 pkt

Zdający

- obliczy wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej kąta α, np.: $\mathrm{tg}\alpha=\frac{16}{12\sqrt{2}}$

  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo

- rozwiąże zadanie do końca, popełniając błędy rachunkowe.

Rozwiązanie pełne ....5 pkt

Zdający poda miarę kąta α w zaokrągleniu 1°: $\alpha\approx 43^\circ$.

Zadanie 30. ***(5 pkt)***

Pierwsza pompa, pracując samodzielnie, napełnia zbiornik w ciągu 12 godzin, a druga pompa napełnia go samodzielnie w ciągu 10 godzin. O godzinie $9:00$ uruchomiono pierwszą pompę, która zaczęła napełniać pusty zbiornik. Po pewnym czasie uruchomiono drugą pompę. Pompy, pracując razem, zakończyły napełniać zbiornik o godzinie 15:48. Oblicz, o której godzinie rozpoczęła pracę druga pompa.

I sposób rozwiązania

Niech *t* oznacza czas (w godzinach) pracy drugiej pompy. Ponieważ pierwsza pompa napełnia cały zbiornik w ciągu 12 godzin, więc w ciągu 1 godziny napełnia $\frac{1}{12}$ zbiornika. Podobnie druga pompa napełnia zbiornik w ciągu 10 godzin, więc w ciągu 1 godziny napełnia $\frac{1}{10}$ zbiornika. Ponieważ czas od chwili rozpoczęcia do chwili zakończenia napełniania zbiornika jest równy $15\frac{48}{60}-9=6\frac{4}{5}$ godziny, więc w tym czasie pierwsza pompa napełniła $\frac{1}{12}\cdot 6\frac{4}{5}$

zbiornika, a druga w czasie t napełniła $\frac{1}{10}t$ zbiornika. Obie pompy napełniła cały zbiornik, więc otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{12}\cdot 6\frac{4}{5}+\frac{1}{10}t=1,$$
$$\frac{1}{12}\cdot \frac{34}{5}+\frac{1}{10}t=1,$$
$$\frac{17}{30}+\frac{1}{10}t=1,$$
$$\frac{1}{10}t=\frac{13}{30},$$
$$t=\frac{13}{3}=4\frac{1}{3}.$$

Zatem druga pompa pracowała przez 4 godziny i 20 minut, więc została uruchomiona o godzinie $11:28$.
Odpowiedź: Druga pompa rozpoczęła pracę o godzinie $11:28$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt
Zdający obliczy wydajność jednej z pomp, np.: pierwsza pompa w ciągu 1 godziny napełnia $\frac{1}{12}$ zbiornika, druga pompa w ciągu 1 godziny napełnia $\frac{1}{10}$ zbiornika.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Zdający wprowadzi jako niewiadomą t czas (w godzinach) pracy drugiej pompy oraz

- wyznaczy część pojemności zbiornika, jaką napełniła pierwsza pompa w czasie $6\frac{4}{5}$ godziny: $\frac{1}{12}\cdot 6\frac{4}{5}$ zbiornika

albo

- wyznaczy część pojemności zbiornika, jaką napełniła druga pompa w czasie t godzin: $\frac{1}{10}t$ zbiornika.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $\frac{1}{12}\cdot 6\frac{4}{5}+\frac{1}{10}t=1$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt
Zdający rozwiąże

- równanie z niewiadomą t i na tym poprzestanie: $t=4\frac{1}{3}$

albo

- zadanie do końca z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie bezbłędne ....5 pkt
Zdający obliczy, o której godzinie rozpoczęła pracę druga pompa: o $11:28$.

II sposób rozwiązania
Niech t oznacza czas (w godzinach) od momentu włączenia pierwszej pompy do momentu włączenia drugiej pompy. Ponieważ pierwsza pompa napełnia cały zbiornik w ciągu 12 godzin, więc w ciągu 1 godziny napełnia $\frac{1}{12}$ zbiornika. Podobnie druga pompa napełnia zbiornik w ciągu 10 godzin, więc w ciągu 1 godziny napełnia $\frac{1}{10}$ zbiornika. W czasie t zostanie więc napełniona $\frac{1}{12}t$ zbiornika. Ponieważ czas od chwili rozpoczęcia do chwili zakończenia napełniania zbiornika jest równy $15\frac{48}{60}-9=6\frac{4}{5}$ godziny, więc obie pompy pracowały razem przez $6\frac{4}{5}-t$ godzin. Zatem napełniły w tym czasie

$\left(6\frac{4}{5}-t\right)\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{10}\right)=\frac{11}{60}\left(\frac{34}{5}-t\right)$ zbiornika. Otrzymujemy zatem równanie

$$\frac{1}{12}t+\frac{11}{60}\left(\frac{34}{5}-t\right)=1,$$
$$\frac{1}{12}t+\frac{11}{60}\cdot\frac{34}{5}-\frac{11}{60}t=1,$$
$$\frac{11}{60}t-\frac{5}{60}t=\frac{11}{30}\cdot\frac{17}{5}-1,$$
$$\frac{6}{60}t=\frac{37}{150},$$
$$t=\frac{37}{15}=2\frac{7}{15}=2\frac{28}{60}.$$

Zatem druga pompa została uruchomiona o 2 godziny i 28 minut później niż pierwsza, a więc o godzinie $11:28$.
Odpowiedź: Druga pompa rozpoczęła pracę o godzinie $11:28$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt
Zdający obliczy wydajność jednej z pomp, np.: pierwsza pompa w ciągu 1 godziny napełnia $\frac{1}{12}$ zbiornika, druga pompa w ciągu 1 godziny napełnia $\frac{1}{10}$ zbiornika.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Zdający wprowadzi jako niewiadomą *t* czas (w godzinach) od momentu włączenia pierwszej pompy do momentu włączenia drugiej pompy oraz

- wyznaczy część pojemności zbiornika, jaką napełniła pierwsza pompa w czasie *t*: $\frac{1}{12}t$ zbiornika

albo

- wyznaczy czas, w jakim pracowały obie pompy w zależności od *t*: $6\frac{4}{5}-t$ godzin.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $\frac{1}{12}t+\frac{11}{60}\left(\frac{34}{5}-t\right)=1$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt
Zdający rozwiąże

- równanie z niewiadomą *t* i na tym poprzestanie: $t=\frac{37}{15}$

albo

- zadanie do końca z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie bezbłędne ....5 pkt
Zdający obliczy, o której godzinie rozpoczęła pracę druga pompa: o $11:28$.

III sposób rozwiązania
Ponieważ pierwsza pompa napełnia cały zbiornik w ciągu 12 godzin, więc w ciągu 1 godziny napełnia $\frac{1}{12}$ zbiornika. Pierwsza pompa pracowała bez przerwy od godziny $9:00$ do godziny $15:48$, a więc przez $15\frac{48}{60}-9=6\frac{4}{5}=\frac{34}{5}$ godziny. Napełniła więc w tym czasie $\frac{1}{12}\cdot\frac{34}{5}=\frac{17}{30}$ zbiornika. Pozostałą część $\frac{13}{30}$ zbiornika napełniła druga pompa. Ponieważ druga pompa napełnia zbiornik w ciągu 10 godzin, więc $\frac{13}{30}$ zbiornika napełnia w ciągu $10\cdot\frac{13}{30}=\frac{13}{3}=4\frac{1}{3}$ godziny. Zatem druga pompa rozpoczęła pracę o godzinie $15\frac{48}{60}-4\frac{1}{3}=15\frac{48}{60}-4\frac{20}{60}=11\frac{28}{60}$, a więc o $11:28$.
Odpowiedź: Druga pompa rozpoczęła pracę o godzinie $11:28$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt
Zdający obliczy wydajność pierwszej pompy: pierwsza pompa w ciągu 1 godziny napełnia $\frac{1}{12}$ zbiornika, druga pompa w ciągu 1 godziny napełnia $\frac{1}{10}$ zbiornika.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Zdający obliczy, jaką część zbiornika napełniła pierwsza pompa w ciągu całego swojego czasu pracy:
$\frac{1}{12}\cdot\frac{34}{5}=\frac{17}{30}$ zbiornika.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt
Zdający obliczy, jaką część zbiornika napełniła druga pompa w ciągu całego czasu swojego pracy: $\frac{13}{30}$ zbiornika.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt
Zdający obliczy, w jakim czasie pracowała druga pompa: $4\frac{1}{3}$ godziny.

Rozwiązanie bezbłędne ....5 pkt
Zdający obliczy, o której godzinie rozpoczęła pracę druga pompa: o $11:28$.