**Arkusz 3.**

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | A | C | D | D | A | D | C | B | B | A | B | C | D | A | C | A | C | B | B | B | D | B | C | C |

## Zadania otwarte

### ZADANIE 26 (2 PKT)

Rozwiąż nierówność: $x^2 + 16 \geqslant 10x + 40$.

### ROZWIĄZANIE

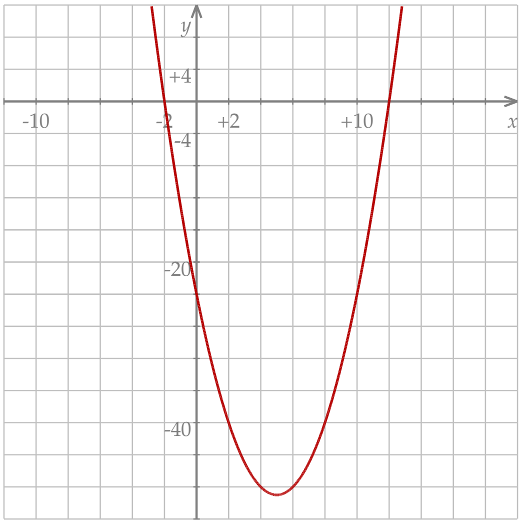
Musimy rozwiązać nierówność

$$x^2 - 10x - 24 \geqslant 0$$

Znajdujemy najpierw miejsca zerowe trójmianu $x^2 - 10x - 24$

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 100 + 96 = 196 = 14^2$$
$$x_1 = \frac{10-14}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{10+14}{2} = 12.$$

Ponieważ współczynnik przy $x^2$ jest dodatni, wykres tego trójmianu jest parabolą o ramionach skierowanych do góry.




Otrzymujemy stąd rozwiązanie nierówności: $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 12, +\infty)$.

---

Odpowiedź: $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 12, +\infty)$

## ZADANIE 27 (2 PKT)

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n$, gdzie $n \geqslant 1$, liczba $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3}$ jest podzielna przez 30.

### ROZWIĄZANIE

Przekształcamy dane wyrażenie

$$2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} = 2^n + 2\cdot 2^n + 2^2\cdot 2^n + 2^3\cdot 2^n =$$
$$= 2^n\cdot(1+2+4+8) = 2^n\cdot 15 = 2^{n-1}\cdot 30.$$

Widać teraz, że jeżeli $n \geqslant 1$, to liczba ta rzeczywiście dziali się przez 30.

## ZADANIE 28 (2 PKT)

Liczebność kolonii bakterii pewnego szczepu w zależności od czasu opisuje funkcja $f(t) = m_0\cdot a^t$, gdzie $t$ – oznacza czas obserwacji w godzinach, $a$ – pewną stałą dodatnią, a $m_0$ – liczebność początkowej próby bakterii. Na początku doświadczenia zaobserwowano 300 sztuk bakterii. Po dwóch godzinach liczba bakterii wzrosła do 1200. Po jakim czasie liczba bakterii wzrośnie do 153600?

### ROZWIĄZANIE

Podane w treści zadania informacje możemy zapisać w postaci równości

$$\begin{cases} 300 = f(0) = m_0 \\ 1200 = f(2) = m_0\cdot a^2 = 300\cdot a^2. \end{cases}$$

Z drugiego równania mamy $a^2 = 4$, czyli $a = 2$. Pozostało rozwiązać równanie

$$153600 = f(t) = m_0\cdot a^t = 300\cdot 2^t \quad / : 300$$
$$512 = 2^t \iff 2^t = 2^9 \iff t = 9.$$

---

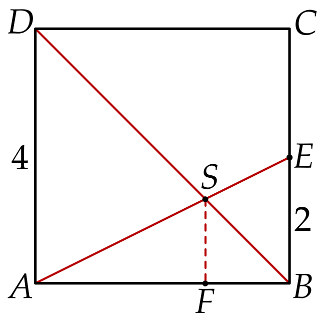
Odpowiedź: **Po 9 godzinach.**

ZADANIE 29 (2 PKT)

Pole kwadratu $ABCD$ jest równe 16. Punkt $E$ jest środkiem boku $BC$, a punkt $S$ punktem przecięcia przekątnej $BD$ kwadratu i odcinka $AE$. Wykaż, że odległość punktu $S$ od boku $AB$ jest równa $\frac{4}{3}$.

ROZWIĄZANIE

Rysujemy opisaną sytuację.




Zauważmy, że trójkąty $ASD$ i $ESB$ mają równe kąty, więc są podobne. Ponadto, skala ich podobieństwa jest równa

$$k = \frac{AD}{EB} = \frac{AD}{\frac{1}{2}AD} = 2.$$

To oznacza, że $DS = kBS = 2BS$ i z podobieństwa trójkątów prostokątnych $ABD$ i $FBS$ (lub z twierdzenia Talesa) mamy

$$\frac{SF}{DA} = \frac{BS}{DB} = \frac{BS}{2BS + BS} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad SF = \frac{DA}{3} = \frac{4}{3}.$$

ZADANIE 30 (2 PKT)

Na sześciu jednakowych kartkach napisano liczby: 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000. Z tych kartek losujemy kolejno bez zwracania trzy. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb tworzy liczbę podzielną przez cztery.

ROZWIĄZANIE

## Sposób I

Trzy liczby z 6 możemy wylosować na

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$$

sposobów. Jeżeli liczba utworzona z wylosowanych liczb ma być podzielna przez 4, to wśród tych liczb nie może być 1 i nie może być 10. Są więc

$$\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$$

sposoby utworzenia takiej liczby. Interesujące nas prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

## Sposób II

Wypiszmy wszystkie liczby jakie możemy otrzymać w wyniku opisanego losowania

111
1011, 1101, 1110
10011, 10101, 11001, 10110, 11010, 11100
100011, 100101, 101001, 110001,
100110, 101010, 110010, 101100, 110100, 111000

Jest więc 20 takich liczb. Liczby podzielne prze 4 na tej liście to liczby kończące się dwoma zerami – są 4 takie liczby. Interesujące nas prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{4}{20}=\frac{1}{5}.$$

---

Odpowiedź: $\frac{1}{5}$

### Zadanie 31 (2 pkt)

W ciągu arytmetycznym $(a_n)$, dla $n\geqslant 1$ suma wyrazów trzeciego, czwartego i piątego wynosi 144. Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów ciągu $(a_n)$.

### Rozwiązanie

Wiemy, że

$$\begin{aligned}144&=a_3+a_4+a_5=(a_1+2r)+(a_1+3r)+(a_1+4r)=3a_1+9r \quad / : 3\\ 48&=a_1+3r.\end{aligned}$$

Mamy natomiast obliczyć

$$S_7=\frac{2a_1+6r}{2}\cdot 7=7(a_1+3r)=7\cdot 48=336.$$

---

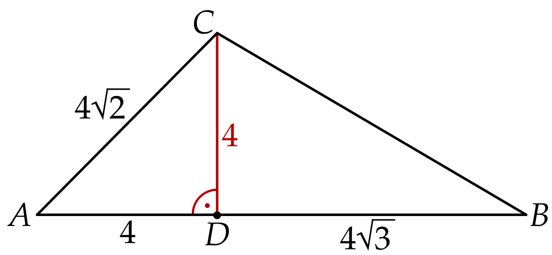
Odpowiedź: **336**

### Zadanie 32 (4 pkt)

W trójkącie rozwartokątnym $ABC$ o kącie rozwartym przy wierzchołku $C$ poprowadzono wysokość $CD$ i otrzymano równoramienny trójkąt $ACD$. Długości boków $AB$ i $AC$ są odpowiednio równe $|AB|=4(1+\sqrt{3})$ i $|AC|=4\sqrt{2}$. Oblicz pole powierzchni koła opisanego na trójkącie $ABC$.

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy opisaną sytuację.




Wiemy, że trójkąt prostokątny $ACD$ jest równoramienny, więc jest to połówka kwadratu i

$$CD = AD = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 4.$$

Stąd

$$DB = AB - AD = 4 + 4\sqrt{3} - 4 = 4\sqrt{3}.$$

Stosujemy teraz twierdzenie Pitagorasa w trójkącie prostokątnym $CDB$.

$$BC = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{16+48} = \sqrt{64} = 8$$

(mogliśmy też zauważyć, że trójkąt $CDB$ to połówka trójkąta równobocznego).

Zastanówmy się do czego zmierzamy – promień $R$ koła opisanego na trójkącie $ABC$ możemy z twierdzenia sinusów

$$2R = \frac{BC}{\sin\measuredangle A} = \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{16}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{8}{\sqrt{2}}.$$

Jeżeli ktoś nie chce korzystać z twierdzenia sinusów, to do tego samego wniosku możemy dojść porównując dwa wzory na pole

$$\frac{1}{2}bc\sin\measuredangle A = P_{ABC} = \frac{abc}{4R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{a}{2\sin\measuredangle A} = \frac{8}{\sqrt{2}}.$$

Pole koła opisanego na trójkącie $ABC$ jest więc równe

$$\pi R^2 = \pi \cdot \frac{64}{2} = 32\pi.$$

---

Odpowiedź: $32\pi$

ZADANIE 33 (4 PKT)

Właściciel sklepu kupuje zegarki płacąc producentowi 180 zł za sztukę. Następnie sprzedaje miesięcznie 30 sztuk takich zegarków po 230 zł. Sprzedawca oszacował, że każda obniżka ceny zegarka o złotówkę zwiększy liczbę sprzedanych zegarków o trzy sztuki. Niech $x$ oznacza liczbę obniżek o 1 zł, gdzie $x \in \{1,2,3,\ldots,30\}$.

a) Wyznacz wzór funkcji miesięcznego zysku właściciela sklepu w zależności od $x$.

b) Jaką cenę zegarka powinien ustalić właściciel sklepu, aby jego miesięczny zysk był największy? Ile będzie równy ten największy miesięczny zysk?

## ROZWIĄZANIE

W chwili obecnej sklep zarabia na zegarkach

$$30 \cdot 50 = 1500.$$

a) Jeżeli cena zostanie obniżona o $x$ złotych, to zysk ze sprzedaży będzie wynosił

$$f(x) = (30+3x)(50-x) = -3(x+10)(x-50).$$

---

**Odpowiedź:** $f(x) = -3(x+10)(x-50)$

b) Ponieważ wykresem funkcji $f(x)$ jest parabola o ramionach skierowanych w dół, wartość największą otrzymamy w wierzchołku paraboli, który jest dokładnie w środku pomiędzy pierwiastkami, czyli w punkcie

$$x_w = \frac{-10+50}{2} = 20$$

(oczywiście mogliśmy też wymnożyć nawiasy we wzorze na $f(x)$ i skorzystać ze wzoru na współrzędne wierzchołka). Zysk dla $x = 20$ wynosi

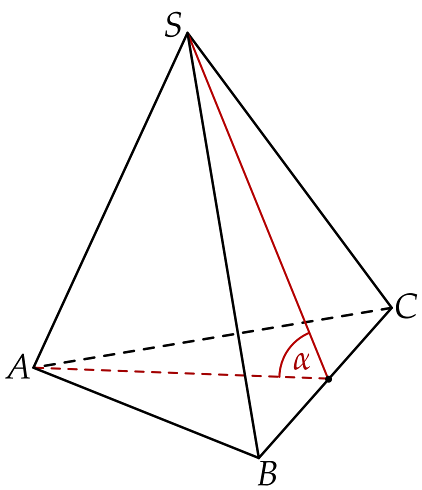
$$f(20) = -3(20+10)(20-50) = -3 \cdot 30 \cdot (-30) = 2700 \text{ zł}.$$

---

Odpowiedź: **Cena: 210 zł, zysk: 2700 zł.**

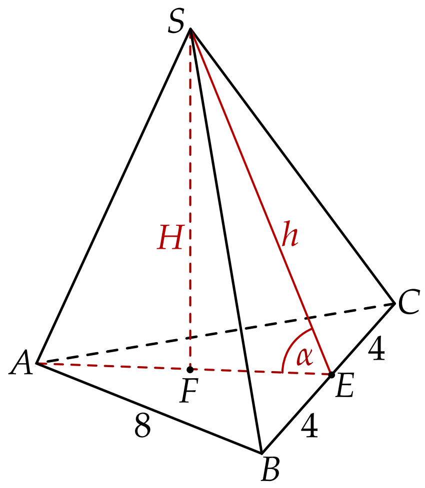
## ZADANIE 34 (5 PKT)

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe $16\sqrt{3}$, a jego objętość $80\sqrt{3}$. Wyznacz cosinus kąta $\alpha$ nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.



## Rozwiązanie

Zaczynamy od rysunku




Podane pole podstawy pozwala obliczyć długość boku $a$ trójkąta równobocznego w podstawie ostrosłupa.

$$16\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad a^2 = 64 \quad \Rightarrow \quad a = 8.$$

Łatwo też obliczyć wysokość $H$ ostrosłupa

$$80\sqrt{3} = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{16\sqrt{3}}{3} \cdot H \quad \Rightarrow \quad H = 15.$$

Korzystamy teraz z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym $SFE$ i obliczamy wysokość $h$ ściany bocznej.

$$FE = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$h = SE = \sqrt{SF^2 + FE^2} = \sqrt{225 + \frac{48}{9}} = \sqrt{\frac{2073}{9}} = \frac{\sqrt{2073}}{3}.$$

Pozostało obliczyć cosinus interesującego nas kąta.

$$\cos\alpha = \frac{FE}{SE} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{2073}}{3}} = \frac{4}{\sqrt{691}} = \frac{4\sqrt{691}}{691}.$$

---

Odpowiedź: $\frac{4\sqrt{691}}{691}$