Zadanie 1.

Wykaż, że dla $a, b \geq 0$ prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Rozwiązanie:

Założenie: $a, b \geq 0$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad |^2$$

$$\frac{1}{4}(a+b)^2 \geq ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną ■

Nierówność ta orzeka, że średnia arytmetyczna jest większa bądź równa średniej geometrycznej. Nierówność można rozszerzyć na $n -$ liczb dodatnich, to jest:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Zadanie 2.

Wykaż, że dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b} \geq a + b$$

Rozwiązanie:

Założenie: $a, b > 0$

$$\frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b} \geq a + b \quad | \cdot ab$$

$$b^3 + a^3 \geq ab(a+b)$$

$$a^3 - a^2 b + b^3 - ab^2 \geq 0$$

$$a^2(a-b) + b^2(b-a) \geq 0$$

$$a^2(a-b) - b^2(a-b) \geq 0$$

$$(a-b)(a^2 - b^2) \geq 0$$

$$(a-b)(a-b)(a+b) \geq 0$$

$$\underbrace{(a-b)^2}_{\geq 0}\left(\underbrace{a+b}_{>0}\right) \geq 0$$

Iloczyn liczb nieujemnych jest nieujemny ■

Zadanie 3.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{3a+3b}{4} \geq \sqrt{2ab}$$

Rozwiązanie:

Założenie: $a, b \geq 0$

$$\frac{3a+3b}{4} \geq \sqrt{2ab}$$

$$3a+3b \geq 4\sqrt{2ab} \quad |^2$$

$$(3a+3b)^2 \geq 32ab$$

$$9a^2+18ab+9b^2-32ab \geq 0$$

$$9a^2-18ab+9b^2 \geq 0$$

$$(3a-3b)^2 \geq 0$$

Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną ■

Zadanie 4.

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność:

$$1+\frac{x^6+y^6}{2} \geq x^3+y^3$$

Rozwiązanie:

Założenie: $x, y \in \mathbb{R}$

$$1+\frac{x^6+y^6}{2} \geq x^3+y^3 \quad |\cdot 2 \cdot 2$$

$$2+x^6+y^6 \geq 2x^3+2y^3$$

$$x^6-2x^3+y^6-2y^3+2 \geq 0$$

$$x^6-2x^3+1+y^6-2y^3+1 \geq 0$$

$$(x^3-1)^2+(y^3-1)^2 \geq 0$$

Suma kwadratów dowolnych liczb rzeczywistych jest nieujemna ■

Zadanie 5.

Wykaż, że jeżeli $x+y=5$, to $x^2+y^2 \geq \frac{25}{2}$.

Rozwiązanie (1):

Założenie: $x+y=5$

$$x^2+y^2 \geq \frac{25}{2}$$

$$x^2+y^2 \geq \frac{\left(\overbrace{x+y}^{=5}\right)^2}{2}$$

$$2x^2+2y^2 \geq (x+y)^2$$

$$2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$
$$(x-y)^2 \geq 0$$

Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną ■

Rozwiązanie (2):

Założenie: $x + y = 5 \ \rightarrow y = 5 - x$

$$x^2 + y^2 \geq \frac{25}{2}$$
$$x^2 + (5-x)^2 \geq \frac{25}{2}$$
$$x^2 + 25 - 10x + x^2 \geq \frac{25}{2}$$
$$2x^2 - 10x + 25 \geq \frac{25}{2}$$
$$4x^2 - 20x + 50 - 25 \geq 0$$
$$4x^2 - 20x + 25 \geq 0$$
$$(2x+5)^2 \geq 0$$

Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną ■

Zadanie 6.

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x, y prawdziwa jest nierówność:

$$4x^2 - 8xy + 5^2 \geq 0$$

Rozwiązanie:

Założenie: $x, y \in \mathbb{R}$

$$4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$$
$$4x^2 - 8xy + 4y^2 + y^2 \geq 0$$
$$(2x - 2y)^2 + y^2 \geq 0$$

Suma kwadratów dowolnych liczb rzeczywistych jest nieujemna ■

Zadanie 7.

Wykaż, że jeżeli $xy > 0$ to $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

Rozwiązanie:

Założenie: $xy > 0$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$
$$\frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} \geq 2 \quad | \cdot xy$$
$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$
$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$(x-y)^2 \geq 0$$

Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną ■

Zadanie 8.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d prawdziwa jest nierówność:

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}$$

Rozwiązanie:

Założenie: $a, b, c, d > 0$

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} \quad |^2$$
$$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$
$$\cancel{a^2c^2} + 2abcd + \cancel{b^2d^2} \leq \cancel{a^2c^2} + a^2d^2 + b^2c^2 + \cancel{b^2d^2}$$
$$2abcd \leq a^2d^2 + b^2c^2$$
$$0 \leq a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2$$
$$0 \leq (ad-bc)^2$$

Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną ■

Zadanie 9.

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest nierówność:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}$$

Rozwiązanie:

Założenie: $a, b \in \mathbb{R}_+$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} = \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$$

Mamy więc wykazać prawdziwość nierówności:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$$
$$\sqrt{ab}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) \leq a\sqrt{a} + b\sqrt{b}$$

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{a} \leq a\sqrt{a} + b\sqrt{b}$$
$$0 \leq a\sqrt{a} + b\sqrt{b} - a\sqrt{b} - b\sqrt{a}$$
$$0 \leq a\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) + b\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)$$
$$0 \leq a\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) - b\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$$
$$0 \leq (a-b)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$$

Stosuje skrócone mnożenie do 1. nawiasu (III wzór)

$$0 \leq \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$$

$$0 \leq \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 (\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

Iloczyn liczb nieujemnych jest nieujemny ■

W dowodzie można posłużyć się **zadaniem 2**, wystarczy położyć $\dot{a} = \sqrt{a}$ i $\dot{b} = \sqrt{b}$.

Zadanie 10.

Wykaż, że dla $a, b \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność:

$$3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0.$$

Rozwiązanie:

Założenie: $a, b \in \mathbb{R}$

$$3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0$$
$$2a^2 + a^2 - 2ab + b^2 + 2b^2 \geq 0$$
$$2a^2 + 2b^2 + (a - b)^2 \geq 0$$

Suma kwadratów dowolnych liczb rzeczywistych jest nieujemna ■

Zadanie 11.

Wykaż, że dla $a, b > 0$ prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

Rozwiązanie:

Założenie: $a, b > 0$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$
$$\frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} \geq \frac{4}{a+b}$$
$$\frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b}$$
$$\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4$$
$$(a+b)^2 \geq 4ab$$
$$a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \geq 0$$
$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$
$$(a-b)^2 \geq 0$$

Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną ■

Zadanie 12.

Wykaż, że dla $x > 0$ prawdziwa jest nierówność:

$$x + \frac{1-x}{x} \geq 1$$

Rozwiązanie:

Założenie: $x > 0$

$$x + \frac{1-x}{x} \geq 1$$

$$\frac{x^2}{x} + \frac{1-x}{x} \geq 1$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x} \geq 1$$

Wykorzystuję założenie, gdyby x nie był dodatni, to nie mógłbym mnożyć stronami

$$x^2 - x + 1 \geq x$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$(x-1)^2 \geq 0$$

Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną ■

Zadanie 13.

Wykaż, że reszta z dzielenia sumy kwadratów czterech kolejnych liczb naturalnych przez 4 jest równa 2.

Rozwiązanie:

Wypisujemy 4 kolejne liczby naturalne (dowolne) oraz kwadraty tych liczb:

1. $n \quad \to n^2$
2. $n+1 \quad \to n^2 + 2n + 1$
3. $n+2 \quad \to n^2 + 4n + 4$
4. $\underline{n+3 \quad \to n^2 + 6n + 9}$ dodajemy stronami

$$4n^2 + 12n + 14 = 4n^2 + 12n + 12 + 2 = 4\left(\underbrace{n^2 + 3n + 3}_{k \in \mathbb{N}}\right) + 2 = 4k + 2$$

Suma kwadratów, to liczba postaci $4k + 2$ zatem przy dzieleniu przez 4 daje resztę 2 ■

Zadanie 14.

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność:

$$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 \geq 2xy(x+y)$$

Rozwiązanie:

Założenie: $x, y \in \mathbb{R}$

$$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 \geq 2xy(x+y)$$

$$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 - 2x^2y - 2xy^2 \geq 0$$

$$(x^4 - 2x^2y + y^2) + (y^4 - 2xy^2 + x^2) \geq 0$$

$$(x^2 - y)^2 + (y^2 - x)^2 \geq 0$$

Suma kwadratów dowolnych liczb rzeczywistych jest nieujemna ■

Zadanie 15.

Udowodnij, że dla dowolnej ujemnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność:

$$4x + \frac{1}{x} \leq 4$$

Rozwiązanie:

Założenie: $x < 0$

$$4x + \frac{1}{x} \leq 4$$
$$\frac{4x^2}{x} + \frac{1}{x} \leq 4$$
$$\frac{4x^2 + 1}{x} - \frac{4x}{x} \leq 0$$
$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{x} \leq 0$$
$$\frac{(2x-1)^2}{x} \leq 0$$

Iloraz liczby nieujemnej przez liczbę ujemną jest liczbą niedodatnią ■

Zadanie 16.

Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $(1{,}5)^{100} < 6^{25}$.

Rozwiązanie:

$$(1{,}5)^{100} < 6^{25}$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{100} < (2 \cdot 3)^{25}$$
$$\frac{3^{100}}{2^{100}} < 3^{25} \cdot 2^{25} \quad | \cdot \frac{2^{100}}{3^{25}}$$
$$3^{75} < 2^{125}$$
$$(3^3)^{25} < (2^5)^{25}$$
$$27^{25} < 32^{25}$$

Ostatnia nierówność jest oczywista (choćby przez fakt, że funkcja a^x, dla $a > 1$ jest rosnąca) ■

Zadanie 17.

Wykaż, że liczba $4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020}$ jest podzielna przez 17.

Rozwiązanie:

$$4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020} = 4^{2017} + 4^{2017} \cdot 4^1 + 4^{2017} \cdot 4^2 + 4^{2017} \cdot 4^3 = 4^{2017}(1 + 4 + 16 + 64) =$$
$$= 4^{2017} \cdot 85 = 4^{2017} \cdot 17 \cdot 5 = 17 \cdot 4^{2017} \cdot 5$$

Liczba jest wielokrotnością liczby 17 zatem dzieli się przez 17 ■

Zadanie 18.

Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $a + b + c = 0$, to:

$$a^2 + 3c^2 + bc + 4ac = 2b^2 + ab$$

Rozwiązanie:

Założenie: $a + b + c = 0$

Z założenia mamy $a = -b - c$

$$a^2 + 3c^2 + bc + 4ac = 2b^2 + ab$$
$$a(a + 4c - b) + 3c^2 + bc - 2b^2 = 0$$
$$(-b - c)(-b - c + 4c - b) + 3c^2 + bc - 2b^2 = 0$$
$$-(b + c)(3c - 2b) + 3c^2 + bc - 2b^2 = 0$$
$$-(3bc - 2b^2 + 3c^2 - 2bc) + 3c^2 + bc - 2b^2 = 0$$
$$-3bc + 2b^2 - 3c^2 + 2bc + 3c^2 + bc - 2b^2 = 0$$
$$0 = 0 \blacksquare$$

Zadanie 19.

Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej k prawdziwa jest nierówność:

$$9k^2 + 9k + 2 > 0$$

Rozwiązanie (1):

Założenie: $k \in \mathbb{C}$

Lewą stronę nierówności potraktujemy jak trójmian kwadratowy.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 81 - 4 \cdot 9 \cdot 2 = 81 - 72 = 9, \qquad \sqrt{\Delta} = 3$$

$$k_1 = \frac{-9 + 3}{18} = -\frac{1}{3} \quad \vee \quad k_2 = \frac{-9 - 3}{18} = -\frac{2}{3}$$

$$k \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, \infty\right) \wedge k \in \mathbb{C}$$

Zauważmy, że w przedziale, gdzie parabola przyjmuje wartości ujemne, tj. $k \in [-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]$ nie ma żadnej liczby całkowitej. Zatem nierówność jest prawdziwa dla wszystkich $k \in \mathbb{C}$.

Rozwiązanie (2):

$$9k^2 + 9k + 2 = (3k + 1)^2 + 3k + 1 = (3k + 1)(3k + 1 + 1) = (3k + 1)(3k + 2)$$

Każdy z nawiasów dla $k \in \mathbb{C}$ przyjmuje wartość tego samego znaku, tj. dla $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ iloczyn jest dodatni, bo wartości nawiasów są dodatnie. Dla $k \in \{\dots, -3, -2, -1\}$ iloczyn też jest dodatni, bo każdy z nawiasów ma wartość ujemną, a iloczyn dwu liczb ujemnych jest dodatni. Zatem faktycznie $(3k + 1)(3k + 2) > 0$ dla dowolnego $k \in \mathbb{C}$.

Zadanie 20.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{4}{\frac{3}{b}+\frac{2}{a}} \leq \frac{3a+2n}{6}$$

Rozwiązanie:

Założenie: $a, b > 0$

$$\frac{4}{\frac{3}{b}+\frac{2}{a}} \leq \frac{3a+2b}{6}$$

$$\frac{4}{\frac{3a}{ab}+\frac{2b}{ab}} \leq \frac{3a+2b}{6}$$

$$\frac{4}{\frac{3a+2b}{ab}} \leq \frac{3a+2b}{6}$$

$$\frac{4ab}{3a+2b} \leq \frac{3a+2b}{6}$$

Wykorzystuję założenie, gdyby a, b nie były dodatni, to nie mógłbym mnożyć stronami

$$4ab \leq \frac{(3a+2b)^2}{6}$$

$$24ab \leq (3a+2b)^2$$

$$0 \leq 9a^2 + 12ab + 4b^2 - 24ab$$

$$0 \leq 9a^2 - 12ab + 4b^2$$

$$0 \leq (3a-2b)^2$$

Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną ∎

Zadanie 21.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest nierówność:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq a + b + ab$$

Rozwiązanie:

Założenie: $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^2 + b^2 + 1 \geq a + b + ab$$

$$a^2 + b^2 + 1 - a - b - ab \geq 0 \quad | \cdot 2$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2 - 2a - 2b - 2ab \geq 0$$

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (a-b)^2 \geq 0$$

Suma kwadratów dowolnych liczb rzeczywistych jest nieujemna ∎

Zadanie 22. PR

Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność:

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 16 > 0$$

Rozwiązanie:

Założenie: $x \in \mathbb{R}$

Wykorzystamy rachunek różniczkowy.

Niech $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 16$.

Ponieważ funkcja jest wielomianem, to dla $x \in \mathbb{R}$ jest ciągła i $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$. $(*)$

Liczymy pochodną funkcji f:

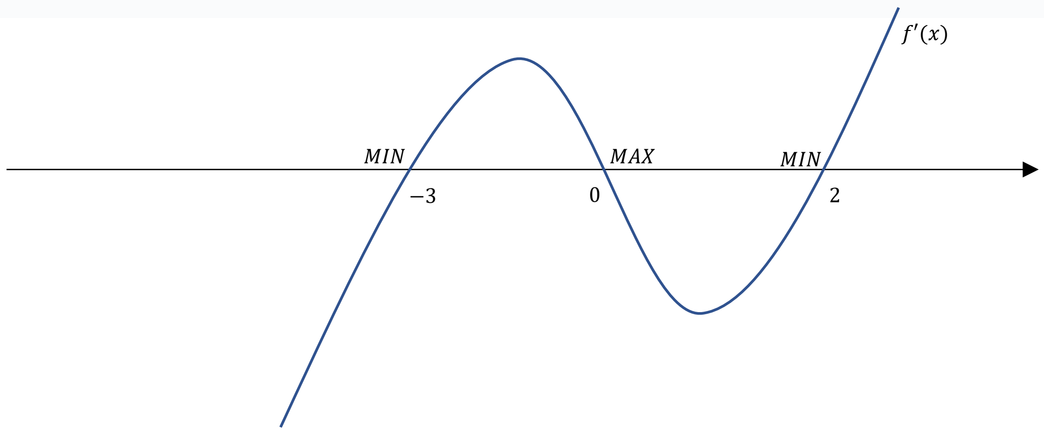
$$f'(x) = x^3 + x^2 - 6x$$

Wyznaczamy ekstrema funkcji. $(**)$

1. Warunek konieczny (warunek Fermat'a)

$$f'(x) = 0 \iff x^3 + x^2 - 6x = 0 \iff x(x^2 + x - 6) = 0 \iff x(x-2)(x+3) \iff x \in \{-3, 0, 2\}$$

2. Warunek wystarczający



Funkcja zatem osiąga ekstrema:

$$f_{max} = f(0) = 16$$

$$f_{min} = f(-3) = \frac{1}{4}$$

$$f_{min} = f(2) = \frac{32}{3}$$

Pokazaliśmy, że najmniejsza wartość funkcji f jest równa $\frac{1}{4}$, zatem nierówność jest prawdziwa $(\mathrm{z} * \mathrm{i} **)$

Zadanie 23. PR

Udowodnij, że jeżeli $a, b \geq 0$, to prawdziwa jest nierówność:

$$4a^3 + b^3 \geq 3ab^2$$

Rozwiązanie:

Założenie: $a, b \geq 0$

$$4a^3 + b^3 \geq 3ab^2$$
$$4a^3 + b^3 - 3ab^2 \geq 0$$
$$a^3 + b^3 + 3a^3 - 3ab^2 \geq 0$$

Korzystamy ze wzoru na sumę sześcianów

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3a(a^2 - b^2) \geq 0$$
$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3a(a+b)(a-b) \geq 0$$
$$(a+b)\left(a^2 - ab + b^2 + 3a(a-b)\right) \geq 0$$
$$(a+b)(4a^2 - 4ab + b^2) \geq 0$$
$$(a+b)(2a-b)^2 \geq 0$$

Iloczyn liczb nieujemnych jest nieujemny ■

Zadanie 24. PR

Udowodnij, że dla każdej liczby $x, y \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność:

$$x(x-1) + y(y-1) \geq xy - 1$$

Rozwiązanie:

Założenie: $x, y \in \mathbb{R}$

$$x(x-1) + y(y-1) \geq xy - 1$$
$$x^2 - x + y^2 - y - xy + 1 \geq 0 / \cdot 2$$
$$2x^2 - 2x + 2y^2 - 2y - 2xy + 2 \geq 0$$
$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$$
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$$

Suma kwadratów dowolnych liczb rzeczywistych jest nieujemna ■

Zadanie 25. PR

Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 19$ jest podzielne przez 16.

Rozwiązanie:

Założenie: n – liczba nieparzysta

Rozłóżmy wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 19$ na czynniki w miarę najniższego stopnia:

$$n^5 - 3n^4 - n + 19 = n^4(n-3) - n + 19 = n^4(n-3) - (n-3) + 16 = (n-3)(n^4 - 1) + 16 =$$
$$= (n-3)(n^2-1)(n^2+1) + 16 = (n-3)(n-1)(n+1)(n^2+1) + 16\,.$$

Mamy zatem:

$$n^5 - 3n^4 - n + 19 = (n-3)(n-1)(n+1)(n^2+1) + 16$$

Ponieważ n jest liczbą nieparzystą zatem każdy z nawiasów jest liczbą parzystą. Są cztery nawiasy i każdy dzieli się przez 2, więc liczba $(n-3)(n-1)(n+1)(n^2+1)$ musi dzielić się przez $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ czyli przez 16. Można zatem zapisać:

$$n^5 - 3n^4 - n + 19 = 16 \cdot k + 16 = 16(k+1),\ \ k \in \mathbb{N}$$

Pokazaliśmy, że $n^5 - 3n^4 - n + 19$ dzieli się przez 16 ■

Zadanie 26. PR

Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność:

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$$

Rozwiązanie:

Założenie: $x, y \in \mathbb{R}$

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$$
$$2x^2 - 4xy + 2y^2 + x^2y^2 - 4xy + 4 > 0$$
$$2(x-y)^2 + (xy-2)^2 > 0$$

Suma kwadratów dowolnych liczb rzeczywistych jest dodatnia, bo $x \neq y$ ■

Zadanie 27. PR

Udowodnij, że dla każdej liczby $x, y \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność:

$$5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 \geq 0$$

Rozwiązanie:

Założenie: $x, y \in \mathbb{R}$

$$5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 \geq 0$$
$$4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + 6x + 9 \geq 0$$
$$(2x-y)^2 + (x-3)^2 \geq 0$$

Suma kwadratów dowolnych liczb rzeczywistych jest nieujemna ■

Zadanie 28. PR

Wykaż, że dla $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność:

$$\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$$

Rozwiązanie:

Założenie: $a, b, c, d > 0$

$$\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd} \quad |^2$$

$$(a+b)(c+d) \geq ac + 2\sqrt{abcd} + bd$$
$$\cancel{ac} + ad + bc + \cancel{bd} \geq \cancel{ac} + 2\sqrt{abcd} + \cancel{bd}$$

$$ad + bc \geq 2\sqrt{abcd}$$
$$ad - 2\sqrt{abcd} + bc \geq 0$$
$$\left(\sqrt{ad} - \sqrt{bc}\right)^2 \geq 0$$

Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną ■

Twierdzenie (PR)

Niech $\vec{u} = [x_1, x_2]$ i $\vec{v} = [y_1, y_2]$. Iloczynem skalarnym wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy liczbę

$$\vec{u} \circ \vec{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Ponad to, jeśli kąt między tymi wektorami ma miarę α, to

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

Mamy więc:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = |\vec{u}||\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

Ponieważ dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi $\cos\alpha \leq 1$ można zapisać:

$$\boldsymbol{\vec{u} \circ \vec{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2} \leq |\boldsymbol{\vec{u}}||\boldsymbol{\vec{v}}|$$

Ostatnia nierówność nosi nazwę nierówności Cauchy'ego – Schwarza (czyt. Kosziego – Szwarca)

Zadanie 29. PR

Wykaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność:

$$\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$$

Rozwiązanie:

Zastosujemy nierówność Cauchy'ego – Schwarza.

Niech $\vec{u} = [\sin x, \cos x]$ i $\vec{v} = [1, 1]$. Wówczas:

$\vec{u} \circ \vec{v} = \sin x \cdot 1 + \cos x \cdot 1 = \sin x + \cos x$

$|\vec{u}| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}$ i $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Z nierówności Cauchy'ego – Schwarza otrzymujemy:

$$\sin x + \cos x \leq \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \quad \blacksquare$$

Zadanie 30. PR

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z takich, że $x + y + z = 1$ prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{1}{3} \leq x^2 + y^2 + z^2$$

Rozwiązanie:

Zastosujemy nierówność Cauchy'ego – Schwarza.

Niech $\vec{u} = [x, y, z]$ i $\vec{v} = [1, 1, 1]$. Wówczas:

$\vec{u} \circ \vec{v} = x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1 = x + y + z = 1$ – z treści zadania.

$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ i $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

Z nierówności Cauchy'ego – Schwarza otrzymujemy:

$$x + y + z = 1 \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad |^2$$

$$1 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \quad |:3$$

$$\frac{1}{3} \leq x^2 + y^2 + z^2 \quad \blacksquare$$