LISTA NR 5 (Wielomiany) POZIOM PODSTAWOWY

1. Zapisz następujące wyrażenia w postaci iloczynu czynników możliwie najniższego stopnia:
   a) $w(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$
   b) $w(x) = 3x^3 - x^2 + 15x - 5$
   c) $w(x) = 2x^6 - x^5 - 10x^4 + 5x^3$
   d) $w(x) = -x^3 + 7x$
   e) $w(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$
   f) $w(x) = -6x^3 - x^2 + 2x$
   g) $w(x) = x^3 - 8$
   h) $w(x) = 3x^4 + 2x^3 + 81x + 54$
   i) $w(x) = x^3 - 3x - 2$
   j) $w(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18$

   UWAGA: w przykładzie f) doprowadź do postaci, w której wszystkie współczynniki wielomianu *w(x)* są liczbami całkowitymi.

2. Rozwiąż równania:
   a) $(x^2 - 2)(x^2 + 4x + 4) = 0$
   b) $3x^4 - 24x^2 = 0$
   c) $9x^4 - 25 = 0$
   d) $-12x^3 - 14x^2 + 10x = 0$
   e) $x^3(x + 5) = 8(x + 5)$
   f) $3x^3 - 5x^2 - 15x + 25 = 0$
   g) $x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$
   h) $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = 0$
   i) $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$
   j) $4x^3 + x - 1 = 0$

3. Wiedząc, że $w(x) = Q(x) \cdot T(x) + R(x)$, gdzie $Q(x) = x^2 - x + 2$, $T(x) = 4x - 4$ i $R(x) = -13x + 10$ rozwiąż równanie $w(x) = 4x^3 + 14x$.

4. Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny, którego krawędź podstawy a ma długość $x - 1$, a wysokość $h = x + 2$. Zapisz wyrażenie $V(x)$ opisujące objętość tego graniastosłupa, ustal jego dziedzinę i wykaż, że jego objętość dla $x = \sqrt{3}$ jest liczbą wymierną.

5. Pierwiastkami równania $x^3 + x^2 + ax + b = 0$ są liczby 1 i –2. Znajdź a i b oraz trzeci pierwiastek tego równania.

6. Wykaż, że suma odwrotności pierwiastków równania $(4x^2 - 7)(3x - 1)(2x - 1) = 0$ jest liczbą pierwszą.

7. Sprawdź, czy równania $x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0$ i $x(x + 3) = 4$ mają wspólne pierwiastki.

8. Sprawdź, czy wartość $w(x) = x^3 + x^2 - 8x + 5$ dla liczby $1 + \sqrt{3}$ jest liczbą wymierną.

9. Wykaż, że $n^3 - n$ dla dowolnego $n \in N_+$ jest podzielne przez 6.

ODPOWIEDZI – lista nr 5

1.

a) $w(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$

b) $w(x)=(3x-1)(x^2+5)$

c) $w(x)=x^3(2x-1)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$

d) $w(x)=-x(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$

e) $w(x)=x^2(x-2)(x-3)$

f) $w(x)=-x(2x-1)(3x+2)$

g) $w(x)=(x-2)(x^2+2x+4)$

h) $w(x)=(3x+2)(x+3)(x^2-3x+9)$

i) $w(x)=(x+1)^2(x-2)$

j) $w(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x+3)$

2.

a) $x\in\{\pm\sqrt{2},-2\}$

b) $x\in\{0,\pm 2\sqrt{2}\}$

c) $x\in\left\{\pm\frac{\sqrt{15}}{3}\right\}$

d) $x\in\left\{-\frac{3}{5},0,\frac{1}{2}\right\}$

e) $x\in\{-5,2\}$

f) $x\in\left\{\frac{5}{3},\pm\sqrt{5}\right\}$

g) $x\in\{-2\}$

h) $x\in\left\{-\frac{3}{2},1,2\right\}$

i) $x\in\{-1,3,4\}$

j) $x\in\left\{\frac{1}{2}\right\}$

3. $x\in\left\{-2,\frac{1}{8}\right\}$

4. $V(x)=x^3-3x+2,\ D=(1,\infty),\ V(\sqrt{3})=2\in W$

5. $a=-2, b=0,$ trzeci pierwiastek $x_3=0$

6. $x_1=-\frac{\sqrt{7}}{2},\ x_2=\frac{\sqrt{7}}{2},\ x_3=\frac{1}{3},\ x_4=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=5$ (a 5 jest liczbą pierwszą)

7. tak, $x=1$

8. tak, 11

9.

Zauważ, że $n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$ czyli mamy iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych.

Wśród trzech kolejnych liczb naturalnych jest zawsze co najmniej jedna liczba parzysta (czyli podzielna przez 2) i dokładnie jedna podzielna przez 3 (wyjaśnij dlaczego), a zatem ich iloczyn jest podzielny przez 6.

Dariusz Domański - Publiczne Liceum Ogólnokształcące nr VI w Opolu