LISTA NR 14 (dowody algebraiczne i geometryczne) POZIOM PODSTAWOWY

1. Udowodnij, że
   a) kwadrat dowolnej liczby nieparzystej jest liczbą nieparzystą;
   b) suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest liczbą podzielną przez 3;
   c) suma kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest parzysta;
   d) różnica czwartych potęg liczby naturalnej i liczby o 2 od niej mniejszej jest podzielna przez 8;
   e) kwadrat sumy liczb $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ i $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ jest liczbą całkowitą;
   f) jeśli liczba naturalna nie jest podzielna przez 3, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1
2. Wykaż, że liczba
   a) $3^{51}+3^{52}+3^{53}$jest podzielna przez 13;
   b) $2^{n+3}+3\cdot 2^{n}$, gdzie $n\in N_{+}$ jest podzielna przez 22;
   c) $3^{n-2}+3^{n-1}+3^{n}+5^{n}+5^{n+2}$, gdzie $n\in N$ i $n\geq 2$ jest wielokrotnością liczby 13;
   d) $4^{100}-6\cdot 4^{98}-27\cdot 4^{97}$ jest podzielna przez 26;
   e) $(3n+1)^2-(3n-1)^2+13$, gdzie $n\in N_{+}$ w wyniku dzielenia przez 12 daje resztę 1.
3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y$ zachodzi nierówność
   a) $(x+y)^2\geq 4xy$
   b) $3x(3x+1)\geq 3(2-x)-7$
   c) $(x^3+y^3)^2\leq (x^2+y^2)(x^4+y^4)$
   d) $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\geq \frac{x+y}{2}$
4. Wykaż, że
   a) jeśli $a>3$ i $b>4$, to $\frac{2a+3b}{6}>3$
   b) jeśli $ab>5$, to $a^2+b^2>10$
   c) jeśli $a^2b^2\geq 7$, to $a^4+b^4\geq 14$
   d) jeśli $x^2+y^2=3$ i $x+y=-2$, to $xy=\frac{1}{2}$
   e) jeśli dwie różne liczby rzeczywiste $x$ i $y$ spełniają warunek $x^2+x=y^2+y$, to $x+y+1=0$.
   f) dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$ i $y$ spełniona jest nierówność $x^4+y^4+x^2+y^2\geq 2(x^3+y^3)$
   g) jeśli $x, y, z$ są liczbami rzeczywistymi takimi, że $x+y+z=1$, to $x^2+y^2+z^2\geq \frac{1}{3}$
5. Uzasadnij, że dowolnym trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych $a, b$ i przeciwprostokątnej $c$
   a) długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równa $r=\frac{a+b-c}{2}$;
   b) wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest średnią geometryczną długości odcinków na jakie ta wysokość dzieli przeciwprostokątną;
   c) suma kwadratów sinusów kątów wewnętrznych tego trójkąta jest równa 2.
6. Udowodnij, że w dowolnym trójkącie
   a) każda środkowa dzieli go na dwa trójkąty o równych polach;
   b) trzy środkowe dzielą trójkąt na sześć trójkątów o jednakowych polach;
   c) miara kąta między wysokością poprowadzoną z wierzchołka $A$ i dwusieczną kąta przy wierzchołku $A$ jest równa połowie różnicy miar kątów przy wierzchołku $B$ i $C$.
7. Uzasadnij, że
   a) dwusieczne dwóch sąsiednich kątów równoległoboku przecinają się pod kątem prostym;
   b) środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku;
   c) jeśli przekątna trapezu równoramiennego zawiera się w dwusiecznej jego kąta ostrego, to ramię jest równej długości z krótszą podstawą;
8. Dany jest równoramienny $\Delta ABC$, w którym $|AC|=|BC|$. Punkt $D$ leży na boku $BC$. Odcinek $AD$ dzieli $\Delta ABC$ na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, że $|AD|=|CD|$oraz $|AB|=|BD|$. Wykaż, że $|\sphericalangle ADC|=5\cdot|\sphericalangle ACD|$.

Dariusz Domański - Publiczne Liceum Ogólnokształcące nr VI w Opolu