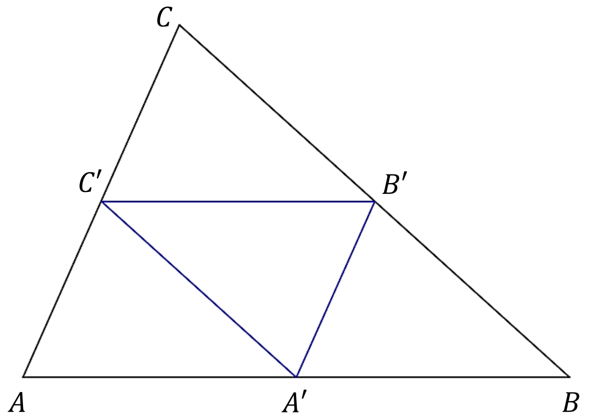
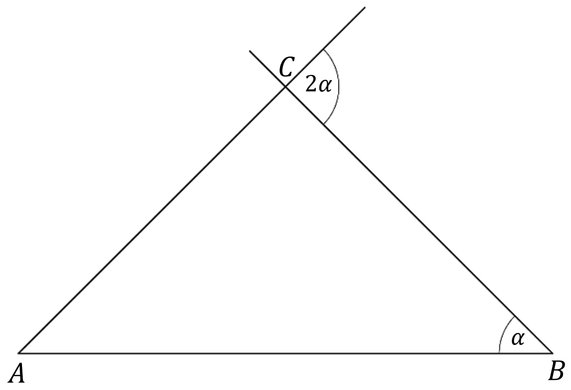
Zadania na dowodzenie

Zadanie 1. Uzasadnij, że suma dwóch liczb dwucyfrowych takich, że cyfra dziesiątek i cyfra jedności pierwszej z nich jest odpowiednio cyfrą jedności i cyfrą dziesiątek drugiej jest podzielna przez 11.

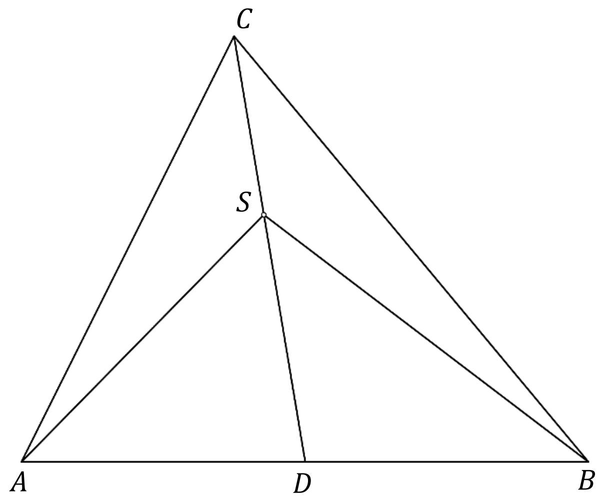
Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC (rys.). Punkty A', B' i C' są odpowiednio środkami boków AB, BC i CA. Wyka, że pole trójkąta $A'B'C'$ jest czterokrotnie mniejsze od pola trójkąta ABC.



Zadanie 3. Uzasadnij, że trójkąt ABC jest równoramienny.



Zadanie 4. Punkt D jest środkiem odcinka AB trójkąta ABC. Na odcinku CD wybrano dowolny punkt S. Wykaż, że pola trójkątów ASD i BSD są równe.

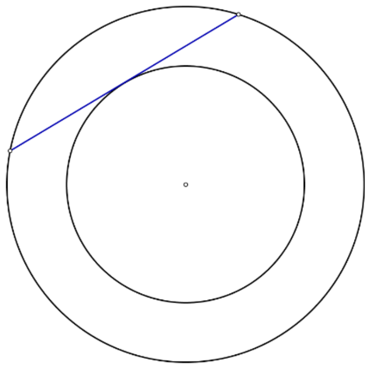


Zadanie 5. Wykaż, że iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez 3 jest podzielny przez 81.

Zadanie 6. Wykaż, że liczba $3^{27} + 3^{29}$ dzieli się przez 30.

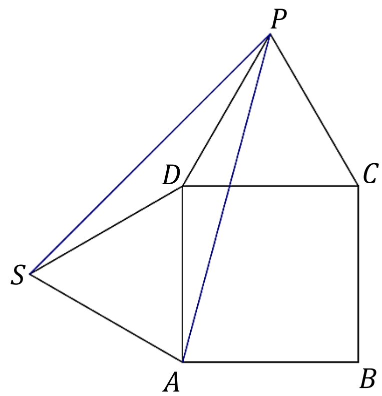
Zadanie 7. Wykaż, że jeśli liczba dzieli się przez 15 i 14, to dzieli się też przez 10.

Zadanie 8. W pierścieniu kołowym cięciwa zewnętrznego okręgu ma długość 10 i jest styczna do wewnętrznego okręgu (rys.).Wykaż, że pole tego pierścienia można wyrazić wzorem, w którym nie występują promienie wyznaczających go okręgów.

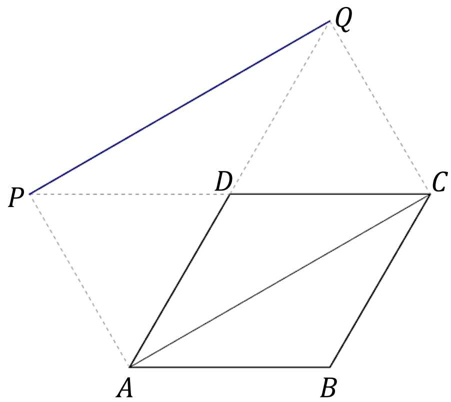


Zadanie 9. W trójkącie o kątach α, β i γ miara kąta α jest równa różnicy miar dwu pozostałych kątów. Wykaż, że trójkąt ten jest prostokątny.

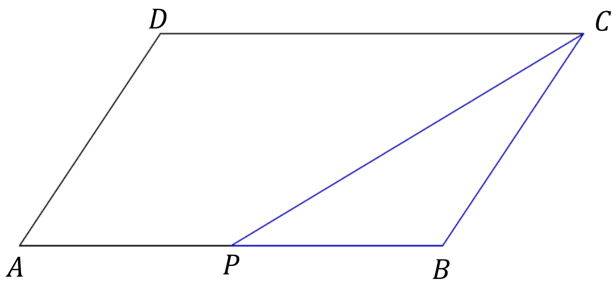
Zadanie 10. Na kwadracie $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne ASD oraz CPD (rys.). Wykaż, że $|SP| = |AP|$.



Zadanie 11. Na bokach rombu $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne APD oraz CQD. Wykaż, że $|PQ| = |AC|$.



Zadanie 12. Punkt P jest środkiem boku AB równoległoboku $ABCD$. Wykaż, że pole trójkąta EBC jest czterokrotnie mniejsze od pola tego równoległoboku.



Odpowiedzi

1. Zapisz pierwszą liczbę w postaci $10a + b$, gdzie a – cyfra dziesiątek i b – cyfra jedności.

$$10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$$

2. Zauważ, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne (kk). Skorzystaj również z twierdzenia, że odcinek łączący środki dwu boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i stanowi połowę jego długości.

3. Zauważ, że $\sphericalangle C = 180° - 2\alpha$, zatem: $\sphericalangle A = 180° - (\sphericalangle C + \alpha) = 180° - 180° + 2\alpha - \alpha = \alpha$. Trójkąt ABC jest równoramienny, bo ma kąty przy podstawie tej samej miary.

4. Narysuj wysokości trójkątów ASD i BSD poprowadzone z wierzchołka S – dla obu trójkątów to ta sama wysokość. Dodatkowo wiemy, że punkt D dzieli bok AB na równe odcinki. Zapisz wzory na pola tych trójkątów.

5. Dowolna liczba naturalna podzielna przez 3 jest postaci $3n$, gdzie n – liczba naturalna. Wówczas kolejne liczby naturalne podzielne przez 3 będą postaci $3n + 3$ oraz $3n + 6$. Mamy zatem:

$$3n(3n + 3)(3n + 6) = 3n \cdot 3(n + 1) \cdot 3(n + 2) = 27n(n + 1)(n + 2)$$

Zauważmy, że iloczyn $n(n + 1)(n + 2)$ to iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych, zatem na pewno dzieli się przez 3 (wśród trzech kolejnych liczb naturalnych jest zawsze jedna podzielna przez 3). Nasz iloczyn zatem dzieli się przez 27 i przez 3, dzieli się więc przez $3 \cdot 27 = 81$.

6. Rozpiszmy liczbę daną w zadaniu (będziemy korzystać z praw działań na potęgach):

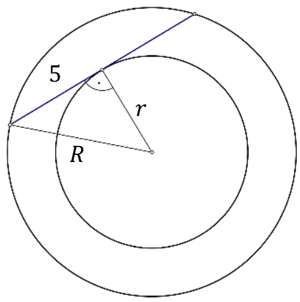
$$3^{27} + 3^{29} = 3^{27} + 3^{27+2} = 3^{27} + 3^{27} \cdot 3^2 = 3^{27}(1 + 3^2) = 3^{27} \cdot 10 = 3^{26+1} \cdot 10 = 3^{26} \cdot 3 \cdot 10 = 3^{26} \cdot 30$$

Otrzymaliśmy liczbę, która jest wielokrotnością liczby 30, zatem cała liczba jest podzielna przez 30.

7. Skoro liczba dzieli się przez 15, to dzieli się przez 5, dodatkowo skoro liczba dzieli się przez 14, to dzieli się przez 2 (jest parzysta). Zatem liczba dzieli się przez 5 i 2 czyli dzieli się przez $5 \cdot 2 = 10$.

8. Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku. Pole pierścienia kołowego obliczamy odejmując pole koła dużego od pola koła małego, mamy więc:

$$P = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$



Zauważmy, że otrzymaliśmy trójkąt prostokątny, więc z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$R^2 = 5^2 + r^2 \quad | - r^2$$
$$R^2 - r^2 = 25$$

Zatem

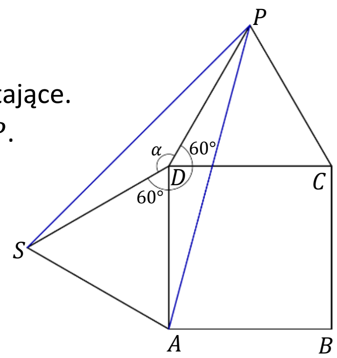
$$P = \pi\left(\overbrace{R^2 - r^2}^{25}\right) = 25\pi$$

Wykazaliśmy, że pole nie zależy od długości promieni, a jedynie od długości cięciwy.

9. Z treści zadania wynika, że $\alpha \overset{(1)}{=} \beta - \gamma$ lub $\alpha \overset{(2)}{=} \gamma - \beta$. Mamy zatem:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \text{ i z } (1)$$
$$\beta - \gamma + \beta + \gamma = 180°$$
$$2\beta = 180°$$
$$\beta = 90° \text{ - trójkąt jest prostokątny.}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \text{ i z } (2)$$
$$\gamma - \beta + \beta + \gamma = 180°$$
$$2\gamma = 180°$$
$$\gamma = 90° \text{ - trójkąt jest prostokątny.}$$



10. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Pokażemy, że trójkąty ADP i ADP są przystające.
Ponieważ trójkąty zbudowane są na bokach kwadratu, to $AD = DP$ oraz $SD = DP$.
Pozostało wykazać, że $\sphericalangle\alpha = 90° + 60° = 150°$. Zauważmy, że:

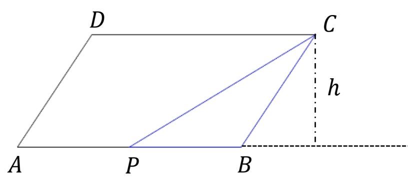
$$\alpha + 60° + 90° + 60° = 360°$$
$$\alpha + 210° = 360°$$
$$\alpha = 150°$$

Trójkąty ADP i ADP są przystające (bkb), zatem $|SP| = |AP|$.

11. Pokaż, że trójkąty APD oraz CQD są przystające.

12. Wprowadźmy dane jak na rysunku.
Pole równoległoboku jest równe:

$$P_r = |AB| \cdot h$$



Pole trójkąta: $P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |PB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot h = \frac{1}{4}\underbrace{|AB| \cdot h}_{P_r} = \frac{1}{4}P_r$